Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Física

D-branas en modelos sigma de Poisson

Trabajo de grado presentado por Alejandro Otero Robles como requisito para optar por el título de físico en la Universidad del Valle

Dirigido por:
Dr. Alexander Quintero Vélez

2017

Agradecimientos

Agradezco al profesor Alexander Quintero por su ayuda a lo largo de todo el proyecto, por sus valiosas sugenrencias y su paciencia. Agradezco a Lina Isabel Triviño por sus valiosas sugerencias en la redacción del texto, por su acompañamiento a lo largo de su desarrollo y por su invaluable compañia. Agradezco a mi familia, por que con su ayuda he logrado llegar hasta este punto, en especial, a mi tía Beatriz Robles por enseñarme el valor del estudio y transmitirme el deseo de aprender.

Índice general

Introducción

El modelo sigma de Poisson es una teoría topológica de campos, en la cual el campo fundamental es un morfismo que va desde el fibrado tangente de una superficie Σ al fibrado cotangente de una variedad de Poisson X. El interés inicial en este modelo se debió al hecho de que ciertas teorías de campos gauge dos-dimensionales, tales como la gravedad topológica, la teoría de Yang-Mills y los modelos de Wess-Zumino-Witten, resultan ser casos particulares de este último. Recientemente, el modelo ha sido de nuevo objeto de atención desde la aparición del artículo de Cattaneo y Felder [1], en el que se demuestra que en el caso en que la superficie Σ es un disco cerrado, la expansión perturbativa de la integral de caminos reproduce el producto estrella introducido por Kontsevich en [2] para resolver el problema de la cuantización de variedades de Poisson.

Este proyecto de grado tiene como objetivo principal proporcionar una descripción detallada de la data geométrica que permite especificar las condiciones de frontera en un modelo sigma de Poisson; para alcanzar este objetivo, se empezará definiendo lo que es una variedad de Poisson, luego, se definirán las estructuras asociadas a este tipo de variedades, a saber, los corchetes de Poisson y los tensores de Poisson, además, se demuestrarán algunas propiedades importantes de estos tensores, por ejemplo, la identificación de los tensores multilineales con las multiderivaciones, que se utilizará para asociar el corchete de Poisson de la variedad (multiderivación) con un campo bivectorial. Con ayuda de esto, se expresará en coordenadas locales la identidad de Jocobi para tensores de Poisson.

En segunda instancia, se definirá una subvariedad coisótropa de una variedad de Poisson; utilizando una subvariedad de este tipo, se determinarán las condiciones de frontera en el modelo.

Una vez se tienen las herramientas matemáticas involucradas en el desarrollo del trabajo, se procederá a explicar lo que es un modelo sigma de Poisson. Se calculará en detalle la variación de la acción del modelo bajo ciertas transformaciones Gauge utilizando la identidad de Jacobi en coordenadas locales. En la última parte, se calculará la variación de la acción bajo un cambio infinitesimal en el campo del modelo, de la que se obtendrán las ecuaciones de movimiento y una restricción sobre la frontera. Así, considerando que el campo del modelo lleva la frontera de la superficie de partida a una subvariedad coistrópica, se obtendrán las condiciones de frontera en coordenadas locales. Por último se mostrará que las condiciones de frontera son invariantes bajo las transformaciones Gauge. Esta descripción de las condiciones de frontera es bastante similar a las condiciones de frontera en la teoría de cuerdas, conocidas bajo el nombre de D-branas.

Preliminares

En este capítulo se define una variedad de Poisson y se definen las estructuras asociadas a esta, los corchetes de Poisson y los tensores de Poisson, además se calcula la forma de la identidad de Jacobi para estos tensores. Por uĺtimo, se define subvariedad coisótropa y se dan algunos ejemplos de ellas.

Corchetes de Poisson

En mecánica clásica se describe la evolución de un sistema mecánico en el tiempo con n grados de libertad utilizando un punto $(q(t), p(t))$ en el espacio de fase $\mathbb{R}^{2n}$. Aquí, los $(q^1(t), \ldots, q^n(t))$ son las coordenadas espaciales generalizadas y los $(p^1(t), \ldots, p^n(t))$ son las coordenadas de momentum generalizadas. La evolución del sistema en el tiempo es determinada por una función $H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada el hamiltoniano. Si $(q(0), p(0))$ es el estado inicial del sistema, entonces el estado en el tiempo t del sistema se puede obtener al resolver las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i};$$

para $i = 1, \ldots, n$.
La descripción del movimiento en mecánica es el punto de partida de la geometría de Poisson. Se inicia definiendo un producto entre cualesquiera funciones suaves f y g sobre el espacio de fase, llamado corchete de Poisson, a saber:

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Así, si una función H ha sido fijada, las ecuaciones de Hamilton pueden ser escritas haciendo uso de este producto, es decir:

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\},$$

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\};$$

para $i = 1, \ldots, n$.

De esta forma muchas propiedades de las ecuaciones de Hamilton pueden ser reescritas en términos de corchetes de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. Por ejemplo, una función f se conserva en el movimiento si y solo si esta conmuta con H(Hamiltoniano) bajo el corchete de Poisson: $\{H, f\} = 0$. También, si dos funciones f_1 y f_2 son conservadas en el moviento, el corchete de Poisson de las dos $\{f_1, f_2\}$ también se conserva.

El corchete de Poisson mencionado anteriormente cumple ciertas propiedades que se utilizan para generalizarlo y definir así una estructura de Poisson sobre una variedad diferencial.

Definición 1.1. Una estructura de Poisson de clase C^∞ sobre una variedad M (de clase C^∞) de dimensión finita es una operación antisimétrica $\mathbb{R}$-bilineal

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ (f, g) \longmapsto \{f, g\}, \tag{1.1}$$

sobre el espacio $C^\infty(M)$ de funciones de valor real C^∞ sobre M, que verifica la identidad de Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \tag{1.2}$$

y la identidad de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\},\ \forall f, g, h \in C^\infty(M). \tag{1.3}$$

El par $(M, \{\cdot, \cdot\})$ es llamado una variedad de Poisson.

Ejemplo 1.1. Se puede definir una estructura de Poisson trivial sobre cualquier variedad al poner $\{f, g\} = 0$ para todo f, g.

Ejemplo 1.2. Sea $M = \mathbb{R}^2$ con coordenadas (x, y) y sea $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave arbitraria. Se puede definir una estructura de Poisson suave sobre $\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) p.$$

Primero, se verifica la identidad de Jacobi (1.2), para esto, a continuación se calculan los términos que la conforman:

$$
\begin{aligned}
\{\{f,g\},h\} = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}p^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial h}{\partial y}p^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}p \\
& - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}p^2 - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial y}p^2 - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}p \\
& - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}p^2 - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\frac{\partial h}{\partial x}p^2 - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}p \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}p^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\frac{\partial h}{\partial x}p^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}p,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\{h,f\},g\} = {} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}p^2 + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial y}p^2 + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}p \\
& - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}p^2 - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial y}p^2 - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}p \\
& - \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}p^2 - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}p^2 - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}p \\
& + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}p^2 + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial g}{\partial x}p^2 + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}p,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\{g,h\},f\} = {} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}p^2 + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial y}p^2 + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}p \\
& - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}p^2 - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y}p^2 - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}p \\
& - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}p^2 - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}p^2 - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}p \\
& + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}p^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial x}p^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}p.
\end{aligned}
$$

De esta forma, al sumar los tres términos se obtiene:

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0.$$

Por último, se verifica la identidad de Leibniz (1.3)

$$
\begin{aligned}
\{f, gh\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial gh}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial gh}{\partial x}\right)p \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}h + g\frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}h + g\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]p \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}h + g\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}h - g\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)p \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}h - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}h\right)p + \left(g\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)p \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)ph + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)p.
\end{aligned}
$$

Así, por la definición del corchete de Poisson, se cumple $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

Definición 1.2. Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad M equipada con una 2-forma diferencial cerrada no degenerada ω, denominada forma simpléctica.

La no degeneración de la 2-forma diferencial ω significa que el correspondiente homomorfismo $\omega^\flat : TM \to T^*M$ del espacio tangente de M a su espacio cotangente, que asocia a cada vector X el covector $\iota_X\omega$ es un isomorfismo. Este isomorfismo viene dado por:

$$
i_X\omega(Y) = \omega(X, Y).
$$

Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función sobre una variedad simpléctica (M, ω), se puede definir su campo vectorial Hamiltoniano denotado por X_f como:

$$
i_{X_f}\omega = -df;
$$

así, se puede defirnir sobre (M, ω) un corchete natural llamado el corchete de Poisson de ω como sigue:

$$
\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\langle df, X_g\rangle = -X_g(f) = X_f(g).
$$

Proposición 1.1. *Si (M, ω) es una variedad simpléctica suave, entonces el corchete $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$ es una estructura de Poisson suave sobre M.*

Demostración. Para verificar que $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$ es un corchete de Poisson, se debe probar que el corchete en cuestión satisface la identidad de Leibniz y la identidad de Jacobi. Veamos:

$$
\begin{aligned}
\{fg, h\} &= \omega(X_{fg}, X_h) \\
&= -\langle d(fg), X_h\rangle \\
&= -\langle gdf + fdg, X_h\rangle \\
&= -\langle gdf, X_h\rangle - \langle fdg, X_h\rangle \\
&= -g\langle df, X_h\rangle - f\langle dg, X_h\rangle \\
&= g\{f, h\} + f\{g, h\};
\end{aligned}
$$

por lo tanto, la identidad de Leibniz se satisface.

Ahora resta verificar que se satisface la identidad de Jacobi: en este caso se utilizará la fórmula de Cartan para la derivada exterior de una k-forma.
Sea η una k-forma diferencial, entonces, por la fórmula de Cartan se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} d\eta(X_1,\ldots,X_{k+1}) = & \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i\left(\eta(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{k+1})\right) \\ & + \sum_{1\leq i<j\leq k+1}(-1)^{i+j}\eta\left([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_{k+1}\right); \end{aligned}$$

donde $X_1,\ldots,X_{k+1}$ son campos vectoriales y el gorro significa que la entrada correspondiente es omitida.

Ya que ω es una 2-forma cerrada se cumple que:

$$d\omega(X_f,X_g,X_h)=0.$$

Aplicando la fórmula de Cartan a ω, X_f, X_g y X_h se llega a que:

$$\begin{aligned} 0 = & \quad X_f(\omega(X_g,X_h))+X_g(\omega(X_h,X_f))+X_h(\omega(X_f,X_g)) \\ & -\omega([X_f,X_g],X_h)-\omega([X_g,X_h],X_f)-\omega([X_h,X_f],X_g) \\ = & \quad X_f\{g,h\}+X_g\{h,f\}+X_h\{f,g\} \\ & +[X_f,X_g](h)+[X_g,X_h](f)+[X_h,X_f](g) \\ = & \quad \{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}+X_f(X_g(h))-X_g(X_f(h)) \\ & +X_g(X_h(f))-X_h(X_g(f))+X_h(X_f(g))-X_f(X_h(g)) \\ & 3(\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}), \end{aligned}$$

por tanto

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0.$$

Lo que permite concluir que cualquier variedad simpléctica es también una variedad de Poisson.

□

Tensores de Poisson

En esta sección se relacionan las estructuras de Poisson con los campos tensoriales de orden dos, definiendo así los tensores de Poisson. Además, se especifica qué condiciones debe satisfacer un campo tensorial de orden dos para ser un tensor de Poisson.

Sea M una variedad suave y q un entero positivo. Se denota por $\Lambda^q TM$ el espacio tangente de q-vectores de M: este es un fibrado vectorial sobre M, cuya fibra sobre cada punto $x \in M$ es el espacio $\Lambda^q T_x M = \Lambda^q(T_x M)$ que es el producto exterior de q copias del espacio tangente $T_x M$. En particular $\Lambda TM = TM$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema local de coordenadas en x, entonces $\Lambda^q T_x M$ admite una base con los siguientes elementos:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}(x),$$

con $i_1 < i_2 < \cdots < i_q$.

Un campo q-vectorial π sobre M es por definición, una aplicación π de M a $\Lambda^q TM$, que asocia a cada punto $x \in M$ un q-vector $\pi(x) \in \Lambda^q T_x M$, de forma suave.
En coordenadas locales, π tendrá la siguiente forma:

$$\pi(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \pi_{i_1 \ldots i_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}(x) = \frac{1}{q!} \sum_{i_1 \ldots i_q} \pi_{i_1 \ldots i_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}(x),$$

donde las componentes $\pi_{i_1 \ldots i_q}$, que son los coeficientes de π, son funciones suaves.

Los coeficientes $\pi_{i_1 \ldots i_q}$ son antisimétricos respecto a los índices, es decir, si se permutan dos índices entonces el coefiente queda multiplicado por -1. Por ejemplo $\pi_{i_1 i_2 \ldots} = -\pi_{i_2 i_1 \ldots}$.
Si los coeficientes $\pi_{i_1 \ldots i_q}$ son de clase C^k, se dice que π es C^k.

Los campos q-vectoriales suaves son objetos duales a las q-formas diferenciales. Si π es un campo q-vectorial y α es una q-forma diferencial que en algún sistema de coordenadas local se escriben como:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \pi_{i_1 \ldots i_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}(x), \\ \alpha &= \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \alpha_{i_1 \ldots i_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}, \end{aligned}$$

entonces su producto se define como:

$$\langle \alpha, \pi \rangle = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \pi_{i_1 \ldots i_q} \alpha_{i_1 \ldots i_q}. \tag{1.4}$$

Observe que este producto es independiente del sistema de coordenadas local elegido: sean U_i y U_j abiertos de la variedad M tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Considere $x \in U_i \cap U_j$ y sean x^μ y y^ν coordenadas de U_i y U_j respectivamente. Se tiene entonces:

$$\pi = \pi_{\mu_1 \ldots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{\mu_q}} = \pi^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \frac{\partial}{\partial y_{\nu_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_{\nu_q}}, \tag{1.5}$$

$$\alpha = \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_q} dx_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_q} = \alpha^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} dy_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dy_{\nu_q}, \tag{1.6}$$

donde se ha utilizado el convenio de sumación de Einstein.

Sabiendo que:

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad dy_\nu = dx_\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}$$

El cambio de coordenadas del lado derecho en la ecuación (1.5) es:

$$\pi = \pi_{\mu_1 \ldots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{\mu_q}} = \pi^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x^{\mu_q}}{\partial y^{\nu_q}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}}.$$

El respectivo cambio de coordenadas del lado derecho de la ecuación (1.6) es:

$$\alpha = \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_q} dx_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_q} = \alpha^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} dx_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_q} \frac{\partial y^{\nu_q}}{\partial x^{\mu_q}}.$$

Las expresiones del lado derecho de las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\pi^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x^{\mu_q}}{\partial y^{\nu_q}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} = \pi^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{\mu_q}},$$

$$\alpha^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} dx_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_q} \frac{\partial y^{\nu_q}}{\partial x^{\mu_q}} = \alpha^{'}_{\nu_1 \ldots \nu_q} det \left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right) dx_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_q},$$

donde $det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right)$ es el determinante del menor $q \times q$ de la matriz $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right]$ seleccionando las primeras q columnas y las primeras q filas.

De esta forma vemos que:

$$\pi_{\mu_1\dots\mu_q}\frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{\mu_q}}=\pi^{'}_{\nu_1\dots\nu_q}det\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\nu}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{\mu_q}},$$

$$\alpha_{\mu_1\dots\mu_q}dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_q}=\alpha^{'}_{\nu_1\dots\nu_q}det\left(\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_q};$$

de donde se puede concluir:

$$\pi_{\mu_1\dots\mu_q}=\pi^{'}_{\nu_1\dots\nu_q}det\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\nu}}\right),$$

$$\alpha_{\mu_1\dots\mu_q}=\alpha^{'}_{\nu_1\dots\nu_q}det\left(\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right).$$

Si se hace ahora el emparejamiento $\langle\alpha,\pi\rangle$ en las coordenadas y^{ν}, se obtiene, por definición:

$$\langle\alpha,\pi\rangle=\sum_{i_1<\cdots<i_q}\pi^{'}_{i_1\dots i_q}\alpha^{'}_{i_1\dots i_q}=\sum_{i_1<\cdots<i_q}\frac{\pi_{i_1\dots i_q}}{det\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\nu}}\right)}\frac{\alpha_{i_1\dots i_q}}{det\left(\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)},$$

Pero se sabe que:

$$det\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\nu}}\right)=\frac{1}{det\left(\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)},$$

por lo tanto, se llega a:

$$\langle\alpha,\pi\rangle=\sum_{i_1<\cdots<i_q}\pi^{'}_{i_1\dots i_q}\alpha^{'}_{i_1\dots i_q}=\sum_{i_1<\cdots<i_q}\pi_{i_1\dots i_q}\alpha_{i_1\dots i_q}.$$

Un campo q-vectorial π define una transformación antisimétrica $\mathbb{R}$-multilineal de $C^{\infty}(M)\times\cdots\times C^{\infty}(M)$ (q veces) a $C^{\infty}(M)$ por la siguiente fórmula:

$$\pi(f_1,\dots,f_q):=\langle\pi,df_1\wedge\cdots\wedge df_q\rangle.\tag{1.7}$$

Proposición 1.2. *Una tranformación $\mathbb{R}$-multilineal $\pi : C^{\infty}(M)\times\cdots\times C^{\infty}(M)\to C^k(M)$ se puede definir por la fórmula (1.7) si, y solo si, π es antisimétrica y satisface la regla de Leibniz o la condición:*

$$\pi(fg,f_2,\dots,f_q)=f\pi(g,f_2,\dots,f_q)+g\pi(f,f_2,\dots,f_q).\tag{1.8}$$

Una transformación π que satisface la fórmula (1.8) es llamada una multiderivación, y la proposición de arriba identifica las multiderivaciones con los campos multivectoriales.

Demostración.

Primero la parte "solo si".

La transformación $\mathbb{R}$-multilineal π se puede escribir como:

$$\pi(f_1, \ldots, f_q) = \langle \pi, df_1 \wedge \cdots \wedge df_q \rangle$$

Para demostrar esto se verifica que la expresión anterior es antisimétrica y satisface la regla de Leibniz.

Primero se demuestra la antisimetría:

$$\begin{aligned}
\pi(f_2, f_1, \cdots, f_q) &= \langle \pi, df_2 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_q \rangle \\
&= \langle \pi, -(df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_q) \rangle \\
&= -\langle \pi, df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_q \rangle \\
&= -\pi(f_1, f_2, \cdots, f_q).
\end{aligned}$$

Sigue ahora la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned}
\pi(fg, f_2, \cdots, f_q) &= \langle \pi, d(fg) \wedge \cdots \wedge df_q \rangle \\
&= \langle \pi, (gdf + fdg) \wedge \cdots \wedge df_q \rangle \\
&= \langle \pi, gdf \wedge \cdots \wedge df_q + fdg \wedge \cdots \wedge df_q \rangle \\
&= \langle \pi, gdf \wedge \cdots \wedge df_q \rangle + \langle \pi, fdg \wedge \cdots \wedge df_q \rangle \\
&= g\langle \pi, df \wedge \cdots \wedge df_q \rangle + f\langle \pi, dg \wedge \cdots \wedge df_q \rangle \\
&= g\pi(f, \cdots, f_q) + f\pi(g, \cdots, f_q).
\end{aligned}$$

Por último se prueba la parte "si".

Se asume, por hipótesis que π es antisimétrica y satisface la regla de Leibniz. Se debe mostrar que dado $\pi(f_1, \cdots, f_q)$ satisfaciendo las condiciones anteriores, existe un campo bivectorial π tal que:

$$\pi(f_1, \ldots, f_q) = \langle \pi, df_1 \wedge \cdots \wedge df_q \rangle.$$

Sea U un abierto con coordenadas $(x_1, \ldots, x_q)$, por la definición (1.4) se puede escribir el lado derecho de la ecuación anterior como:

$$\pi(f_1, \cdots, f_q) = \sum \pi_{i_1 \cdots i_q} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial f_q}{\partial x_{i_q}}. \tag{1.9}$$

Primero se verifica que $\pi(1, f_2, \cdots, f_q) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M)$, esto se sigue de la regla de Leibniz, pues:

$$\pi(1, f_2, \cdots, f_q) = \pi(1 \times 1, f_2, \cdots, f_q) = 1 \times \pi(1, f_2, \cdots, f_q) + 1 \times \pi(1, f_2, \cdots, f_q),$$

así,

$$\pi(1, f_2, \cdots, f_q) = 2\pi(1, f_2, \cdots, f_q),$$

y, por tanto $\pi(1, f_2, \cdots, f_q) = 0$.

Además, por linealidad se tiene que $\pi(c, f_2, \cdots, f_q) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$, ya que:

$$\pi(c, f_2, \cdots, f_q) = c\pi(1, f_2, \cdots, f_q) = 0.$$

Para una función $f \in C^\infty(U)$, la expansión de Taylor de f alrededor de x_0 es:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x^i - x_0^i) + \sum_{i,j=1}^{q} F_{ij}(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + O(3),$$

con $F_{ij} \in C^\infty(U)$. Si se expresa cada f_i con la aproximación de Taylor, se tiene:

$$\pi(f_1, \cdots, f_q)(x) = \pi \Bigg(f_1(x_0) + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0)(x^i - x_0^i) + \sum_{i,j=1}^{q} F_{1ij}(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \\ O(3), \cdots, f_q(x_0) + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x_0)(x^i - x_0^i) + \sum_{i,j=1}^{q} F_{qij}(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + O(3) \Bigg),$$

esta expresión, utilizando $\pi(c, f_2, \cdots, f_q) = 0$, y la linealidad de $\pi(f_1, \ldots, f_q)$ se puede simplificar como:

$$\pi(f_1, \cdots, f_q)(x) = \sum_{i_1, \ldots, i_q = 1}^{q} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}(x_0) \cdots \frac{\partial f_q}{\partial x_{i_q}}(x_0) \pi(x_1, \ldots, x_q)(x) + \sum_{i=1}^{q} G(x)(x^i - x_0^i),$$

para algunas funciones $G(x) \in C^\infty(U)$. Por tanto, si se hace $x = x_0$, se obtiene:

$$\pi(f_1, \cdots, f_q)(x_0) = \sum_{i_1,\ldots,i_q=1}^{q} \pi(x_1, \ldots, x_q)(x_0) \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}(x_0) \cdots \frac{\partial f_q}{\partial x_{i_q}}(x_0),$$

y ya que el punto x_0 es un punto arbitrario de U, el resultado se sigue para todo U, es decir:

$$\pi(f_1, \cdots, f_q) = \sum \pi_{i_1 \cdots i_q} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial f_q}{\partial x_{i_q}}.$$

Así, se cumple que:

$$\pi(f_1, \cdots, f_q) = \langle \pi, df_1 \wedge \cdots \wedge df_q \rangle.$$

□

En particular, si π es una estructura de Poisson, entonces esta es antisimétrica y satisface la regla de Leibniz, por tanto, esta se puede escribir a partir de un campo bivectorial como sigue:

$$\{f, g\} = \pi(f, g) = \langle \pi, df \wedge dg \rangle. \tag{1.10}$$

Un campo bivectorial π, tal que $\{f, g\} = \langle \pi, df \wedge dg \rangle$ es un corchete de Poisson, es decir, que $\{f, g\}$ satisfaga la identidad de Jacobi, es llamado un tensor de Poisson. El correspondiente corchete de Poisson es denotado por $\{,\}_\pi$.

De esta forma, se puede definir una variedad de Poisson como el par (M, π), donde π es el tensor de Poisson asociado al corchete de Poisson $\{,\}$.

En un sistema local de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ se tiene:

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{1.11}$$

donde $\pi_{ij} = \langle \pi, dx_i \wedge dx_j \rangle = \{x_i, x_j\}$, y

$$\{f, g\} = \langle \sum_{i<j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \Sigma_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j \rangle = \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \tag{1.12}$$

Ejemplo 1.3. El tensor de Poisson correspondiente a la forma simpléctica estándar $\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$ en $\mathbb{R}^{2n}$ es $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}$.

Proposición 1.3. *Para cualquier campo bivectorial C^1-suave π, se puede asociar a este un campo trivectorial Λ definido como:*

$$\Lambda(f, g, h) = \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}, \tag{1.13}$$

donde $\{s, t\}$ denota $\langle \pi, ds \wedge dt \rangle$.

Demostración. Para probar que $\Lambda(f, g, h)$ define un campo trivectorial, basta probar que $\Lambda(f, g, h)$ es $\mathbb{R}$-multilineal, antisimétrico y satisface la regla de Leibniz. El lado derecho de la ecuación (1.13) es $\mathbb{R}$-multilineal y antisimétrica por definición a partir del campo bivectorial. Así, basta probar que $\Lambda(f, g, h)$ satisface la regla de Leibniz.

$$\Lambda(f_1 f_2, g, h) = f_1 \Lambda(f_2, g, h) + f_2 \Lambda(f_1, g, h), \tag{1.14}$$

es decir:

$$\begin{aligned} &\{\{f_1 f_2, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_1 f_2\} + \{\{h, f_1 f_2\}, g\} \\ &\qquad = f_1(\{\{f_2, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_2\} + \{\{h, f_2\}, g\}) \\ &\qquad\qquad + f_2(\{\{f_1, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_1\} + \{\{h, f_1\}, g\}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Se calcula ahora cada uno de los sumandos del lado izquierdo de la ecuación (1.15)

$$\begin{aligned} \{\{f_1 f_2, g\}, h\} &= \{f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}, h\} = \{f_1\{f_2, g\}, h\} + \{f_2\{f_1, g\}, h\} \\ &= f_1\{\{f_2, g\}, h\} + \{f_2, g\}\{f_1, h\} + f_2\{\{f_1, g\}, h\} + \{f_1, g\}\{f_2, h\}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\{\{g, h\}, f_1 f_2\} = \{\{g, h\}, f_1\} f_2 + \{\{g, h\}, f_2\} f_1, \tag{1.17}$$

$$
\begin{aligned}
\{\{h, f_1 f_2\}, g\} &= \{f_1\{h, f_2\} + f_2\{h, f_1\}, g\} = \{f_1\{h, f_2\}, g\} + \{f_2\{h, f_1\}, g\} \\
&= f_1\{\{h, f_2\}, g\} + \{h, f_2\}\{f_1, g\} + f_2\{\{h, f_1\}, g\} + \{h, f_1\}\{f_2, g\}. \quad (1.18)
\end{aligned}
$$

Se suman los tres términos anteriores y en la ecuación (1.18) se cambian los sumandos $\{h, f_1\}$ por $-\{f_1, h\}$ y $\{h, f_2\}$ por $-\{f_2, h\}$ utilizando la antisimetría del corchete:

$$
\begin{aligned}
&\{\{f_1 f_2, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_1 f_2\} + \{\{h, f_1 f_2\}, g\} \\
&\quad = f_1\{\{f_2, g\}, h\} + \{f_2, g\}\{f_1, h\} + f_2\{\{f_1, g\}, h\} + \{f_1, g\}\{f_2, h\} + \{\{g, h\}, f_1\} f_2 \\
&\quad + \{\{g, h\}, f_2\} f_1 + f_1\{\{h, f_2\}, g\} - \{f_2, h\}\{f_1, g\} + f_2\{\{h, f_1\}, g\} - \{f_1, h\}\{f_2, g\} \\
&\qquad = f_1\{\{f_2, g\}, h\} + f_2\{\{f_1, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_1\} f_2 \\
&\qquad\quad + \{\{g, h\}, f_2\} f_1 + f_1\{\{h, f_2\}, g\} + f_2\{\{h, f_1\}, g\}. \quad (1.19)
\end{aligned}
$$

Por último, al factorizar, se obtiene el resultado de la ecuación (1.15):

$$
\begin{aligned}
&\{\{f_1 f_2, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_1 f_2\} + \{\{h, f_1 f_2\}, g\} \\
&\qquad = f_1(\{\{f_2, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_2\} + \{\{h, f_2\}, g\}) \\
&\qquad\quad + f_2(\{\{f_1, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f_1\} + \{\{h, f_1\}, g\}). \quad (1.20)
\end{aligned}
$$

$\square$

Se procede ahora a calcular en coordenadas locales $\Lambda(f, g, h)$

$$
\Lambda(f, g, h) = \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}. \quad (1.21)
$$

Para esto, se calculan cada uno de los términos de la derecha de la ecuación anterior en coordenadas locales; para calcular los tres términos basta con calcular el primero y después rotar el nombre de las funciones.

Para calcular el primer término en coordenadas locales, primero se calcula el corchete de f y g a partir de la definición del corchete en función del campo bivectorial:

$$
\{f, g\} = \langle \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, df \wedge dg \rangle, \quad (1.22)
$$

$$df \wedge dg = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge \sum \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j, \tag{1.23}$$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \pi_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \tag{1.24}$$

Por la misma definición, el término $\{\{f, g\}, h\}$ es:

$$\{\{f, g\}, h\} = \langle \sum \pi_{s,k} \frac{\partial}{\partial x_s} \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}, d(\{f, g\}) \wedge dh \rangle. \tag{1.25}$$

Se procede entonces a calcular los términos que intervienen en la definición, dh y $d(\{f, g\})$

$$dh = \sum \frac{\partial h}{\partial x_k} dx_k, \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} d(\{f, g\}) &= \frac{\partial \pi_{i,j}}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \pi_{ij} dx_s \\ &= \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_s + \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \pi_{ij} dx_s + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_j} \pi_{ij} dx_s. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Ahora, se continúa con el cálculo de $d(\{f, g\}) \wedge dh$

$$\begin{aligned} d(\{f, g\}) \wedge dh = \Bigg(&\sum_s \sum_{i,j,k} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} + \\ &\sum_s \sum_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} \pi_{ij} + \\ &\sum_s \sum_{ijk} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} \pi_{ij} \Bigg) dx_s \wedge dx_k. \end{aligned} \tag{1.28}$$

De acuerdo a lo anterior, el término $\{\{f, g\}, h\}$ queda como:

$$\{\{f,g\},h\} = \sum_{ijk}\sum_{s}\Bigg(\pi_{sk}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}$$
$$+ \pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}$$
$$+\pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}\Bigg). \quad (1.29)$$

Como se dijo antes, rotando las funciones f, g y h, se obtienen los otros dos términos del lado derecho de la ecuación (1.21), así:

$$\{\{h,f\},g\} = \sum_{ijk}\sum_{s}\Bigg(\pi_{sk}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k}$$
$$+ \pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k}$$
$$+\pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}\Bigg), \quad (1.30)$$

$$\{\{g,h\},f\} = \sum_{ijk}\sum_{s}\Bigg(\pi_{sk}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$
$$+ \pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$
$$+\pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Bigg). \quad (1.31)$$

Antes de hacer la suma final, se renombran los índices de la siguiente forma:

$i \to k$, $j \to i$, $k \to j$.

$$\{\{h,f\},g\} = \sum_{ijk}\sum_{s}\Bigg(\pi_{sj}\frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}$$
$$+ \pi_{sj}\pi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_k}$$
$$+\pi_{sj}\pi_{ki}\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}\Bigg), \quad (1.32)$$

$i \to j$, $j \to k$, $k \to i$.

$$\{\{g,h\},f\} = \sum_{ijk}\sum_{s}\left(\pi_{si}\frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}\right.$$
$$+\pi_{si}\pi_{jk}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}$$
$$\left.+\pi_{si}\pi_{jk}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_k}\right). \quad (1.33)$$

De esta forma, se suman las ecuaciones (1.29), (1.32), (1.33) y se aplica la antisimetría del campo bivectorial ($\pi_{ij} = -\pi_{ji}$), obteniéndose:

$$\Lambda(f,g,h) = \{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} =$$
$$\sum_{ijk}\sum_{s}\left(\pi_{sk}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k} + \pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k} + \pi_{sk}\pi_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}\right.$$
$$+\pi_{sj}\frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k} + \pi_{sj}\pi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_k} - \pi_{sj}\pi_{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}$$
$$\left.+\pi_{si}\frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k} - \pi_{si}\pi_{kj}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k} - \pi_{si}\pi_{kj}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_k}\right). \quad (1.34)$$

Y así, al eliminar los términos semejantes, queda la siguiente expresión:

$$\Lambda(f,g,h) = \sum_{ijk}\left(\oint_{ijk}\sum_{s}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s}\pi_{sk}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}, \quad (1.35)$$

donde $\oint_{ijk} a_{ijk}$ significa la suma cíclica $a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}$.

De la ecuación anterior se puede ver fácilmente que el campo trivectorial asociado a $\Lambda(f,g,h)$ es:

$$\Lambda = \sum_{i<j<k}\left(\oint_{ijk}\sum_{s}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s}\pi_{sk}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}\wedge\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.36)$$

De acuerdo a todo lo realizado anteriormente, y reconociendo que la identidad de Jacobi para π se cumple cuando $\Lambda = 0$ se puede hacer la siguiente afirmación:

Proposición 1.4. *Un campo 2-vectorial* $\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ *expresado en un sistema de coordenadas dado* $(x_1, \ldots, x_n)$ *es un tensor de Poisson si, y solo si, este satisface los siguientes sitemas de ecuaciones:*

$$\oint_{ijk} \sum_{s} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s} \pi_{sk} = 0 \qquad (\forall\, i, j, k). \tag{1.37}$$

Ejemplo 1.4. Estructura de Poisson constante en $\mathbb{R}^n$: Si se toman constantes cualesquiera para π_{ij}, se observa que la proposición anterior se cumple trivialmente, por tanto, todos los tensores bivetoriales constantes son estructuras de Poisson.
En particular, la estructura de Poisson canónica en $\mathbb{R}^{2n}$ asociada a la forma simpléctica canónica $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ es de este tipo.

Ejemplo 1.5. Cualquier campo bivectorial en una variedad dos dimensional es un tensor de Poisson. El campo trivectorial Λ en la proposición (1.3) es idénticamente cero, ya que no hay trivectores no triviales sobre una variedad dos dimensional. Así, la identidad de Jacobi es no trivial a partir de dimensión 3.

Subvariedades coisótropas

En esta sección se recuerda el concepto de subvariedad en general y se define lo que es una subvariedad coisótropa junto a algunas de sus propiedades.

Se comienza recordando el concepto de subvariedad:

Definición 1.3. Sea M una variedad C^∞, $n = dim\,M$. Diremos que $N \subset M$ es una subvariedad de dimensión k si $\forall q \in N$ existe una carta (U, ϕ) en M tal que $q \in U$, $\phi(q) = 0 \quad \in \mathbb{R}^n$ y tal que:

$$\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{z \in \phi(U) | z^{k+1} = z^{k+2} = \cdots = z^n = 0\}.$$

De esta definición se puede observar que así como una variedad es un espacio que localmente es como $\mathbb{R}^n$, una subvariedad es un espacio que localmente luce como un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Se definen las cartas de la subvariedad de la siguiente forma:

Sea $q \in N$ y sea (U, ϕ) una carta en M con $q \in U$ y tal que:

$$\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Ahora

$$\overline{\phi(U)} := \{(t^1, \ldots, t^n) | (t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0) \in \phi(U)\}$$

$$\overline{\phi} : U \cap N \longrightarrow \overline{\phi(U)} \subset \mathbb{R}^k$$

Y así, $(U \cap N, \overline{\phi})$ es denominada carta de subvariedad para N.
La colección de todas las cartas de subvariedad en N forman un atlas C^∞ y por tanto definen una estructura C^∞ sobre N.

Definición 1.4. Una aplicación C^∞ $f : N \longrightarrow M$ es una inmersión difeomórfica si:

- f es inyectiva.
- $df(q) : T_q N \longrightarrow T_{f(q)} M \; \forall q \in N$.
- f es un homeomorfismo de N sobre $f(N)$.

Proposición 1.5. *Sea $f : N \longrightarrow M$ una inmersión difeomórfica, entonces $f(N)$ es una subvariedad de M y $f : N \longrightarrow f(N)$ es un difeomorfismo.*

Antes de pasar a la definición de subvariedad coisótropa, se recuerda el concepto de campo vectorial hamiltoniano.
Recordando que el campo bivectorial en un sistema local de coordenadas se escribe como

$$\sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

el campo vectorial hamiltoniano asociado a una función $H \in C^\infty(U)$ en una carta (U, x) está dado por:

$$X_H = \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definición 1.5. Una subvariedad Y de una variedad de Poisson (M, π) se llama subvariedad coisótropa de M si para cada subconjunto abierto V de Y y para cada función f, definida en una vecindad de V en M tal que $f_{Y\cap V} = 0$, el campo vectorial hamiltoniano X_f es tangente a Y en cada punto de V.

La condición de que una variedad Y de una variedad de Poisson sea coisótropa puede establecerse puntualmente. Para ello, debe recordarse que un campo bivectorial $\pi \in \mathfrak{X}^2$ determina una aplicación $\pi^\# : \Omega^1 \longrightarrow \mathfrak{X}^1$ definida por $\alpha \longrightarrow i_\alpha \pi$. De esta forma, se tiene una aplicación $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$ tal que:

$$\pi_x^\# : T_x^*M \longrightarrow T_xM.$$

Ahora, un campo bivectorial $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ se dice que no es degenerado en $x \in M$ si $\pi_x^\# : T_x^*M \longrightarrow T_xM$ es un isomorfismo. Así, se dirá que $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ es no degenerada si es no degenerada en cada punto x de M. Si se considera un campo bivectorial $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ como una aplicación que a cada punto $x \in M$ asocia la forma bilineal antisimétrica:

$$\pi_x^\# : T_x^*M \times T_x^*M \longrightarrow \mathbb{R},$$

entonces la no degeneración de π (para x en M) es la misma que la no degeneración de esta forma bilineal antisimétrica en x.

Finalmente, se define el subespacio N_x^*Y de T_x^*M como:

$$N_x^*Y := \{\alpha \in T_x^*M \mid \alpha(v) = 0 \text{ para todo } v \in T_xY\}.$$

Cada elemento en N_x^*Y puede ser considerado como la diferencial en x de alguna función f, definida sobre una vecindad de x en M y cuya restricción a Y es cero.
Con estas ideas claras, se establece el siguiente resultado:

Proposición 1.6. *Sea Y una subvariedad de una variedad de Poisson (M, π), las siguientes condiciones sobre Y son equivalentes:*

- *Y es una subvariedad coisótropa;*
- *Para cada $x \in Y$, $\pi_x(N_x^*Y, N_x^*Y) = \{0\}$;*
- *Para cada $x \in Y$, $\pi_x^\#(N_x^*Y) \subset T_xY$.*

A continuación, se expresa la condición de una subvariedad Y de una variedad de Poisson (M, π) para que sea una subvariedad coisótropa en términos de un sistema de coordenadas de la variedad M.

Sea $Y \subset M$ una subvariedad embebida de M, además sean:

$$dimY = s, \qquad dimM = s + t.$$

Sea x un punto en Y, entonces, sobre un vecindad de x en M existen funciones $x^{'1}, \ldots, x^{'t}$, tales que $(x^{'1}, \ldots, x^{'s}, x^{''1}, \ldots, x^{''t})$ es un sistema coordenado para M en una vecindad U de x y tal que $Y \cap U$ está dado por las ecuaciones $x^{''1} = \cdots = x^{''t} = 0$.

Ahora, se define la matriz de Poisson asociada a π.

Ya que π se puede escribir en un abierto (U, x) como:

$$\sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La matriz de Poisson X asociada a π es la matriz cuya entrada ij es π_{ij}. Así, la matriz de Poisson asociada a π en las coordenadas anteriores es:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix};$$

donde A y D son matrices cuadradas de tamaño s y t respectivamente y cada uno de los bloques A, B, C, D es una función que devuelve matrices en U.

Proposición 1.7. *Sea Y una subvariedad de una variedad de Poisson (M, π) con las condiciones anteriormente mencionadas, entonces, Y es una subvariedad coisótropa si y solo si $D|_{Y \cap U} = 0$.*

Demostración. Y es coisótropa en $U \subset M$ si y solo si cada campo vectorial hamiltoniano X_F, con F una función sobre U que se hace cero sobre $Y \cap U$, es tangente a Y en cada punto de $Y \cap U$. Ya que $Y \cap U$ es la región donde las coordenadas locales $x^{''1}, \ldots, x^{''t}$ se hacen cero, esto sucede si y solo si los campos vectoriales hamiltonianos $X_{x^{''i}}$ son tangentes a $Y \cap U$ en cada punto de $Y \cap U$ para todo $i = 1, \ldots, t$ y esto se cumple si y solo si $X_{x^{''i}}[x^{''j}](x) = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots t$ y $x \in Y \cap U$. Ahora, ya que $X_{x^{''i}}$ en U es $X_{x^{''i}} = \sum_{l<j} \pi_{lj} \frac{\partial x^{''i}}{\partial x^{''l}} \frac{\partial}{\partial x^{''j}}$ entonces aplicado a $x^{''j}$ la condición $X_{x^{''i}}[x^{''j}](x) = 0$, será $\pi_{ij}(x^{'}, x^{''} = 0) = 0$, que es lo mismo que $D|_{Y \cap U} = 0$.

□

Ahora, se ilustran algunos ejemplos de subvariedades coisótropas.

Ejemplo 1.6. Cualquier subvariedad de codimensión 1 de una variedad de Poisson (M, π) satisface $\pi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \forall \alpha, \beta \in N^*Y$.

Ejemplo 1.7. Sea $\mathbb{R}^{2n}$ con la estructura de Poisson canónica. Para cualquier conjunto abierto $U \in \mathbb{R}^{2n}$ las subvariedades:

$$C_r^p = \{(q,p) \in U : p_r = p_{r+1} = \cdots = p_n = 0\},$$

$$C_r^q = \{(q,p) \in U : q_r = q_{r+1} = \cdots = q_n = 0\},$$

donde $1 \leq r \leq n$, son subvariedades coisótropas.

Modelo sigma de Poisson

Introducción

En este punto ya se tienen todas las herramientas necesarias para hablar sobre un modelo sigma de Poisson; se hará uso, para describirlo, de variedades de Poisson; y para determinar las condiciones de frontera de este, variedades coisótropas. En este capítulo se describirá detalladamente un modelo sigma de Poisson, se verá que este queda especificado por una superficie compacta que se conoce como fuente, una variedad de Poisson (cuyas propiedades se discutieron en los preliminares) conocida como variedad objetivo y un morfismo entre ellas, que queda parametrizado por una aplicación diferencial $\phi : \Sigma \longrightarrow X$ y una 1-forma η sobre Σ que toma valores en $\phi^* T^* X$. Además se define la acción asociada al modelo y se calcula la variación de esta acción bajo ciertas transformaciones Gauge. La idea es mostrar como varía la acción de la teoría bajo las transformaciones Gauge consideradas y a partir de esta variación encontrar las restriciones que se deben imponer en la frontera de la superficie compacta para que el cambio de la acción sea invariante bajo las transformacones Gauge. En la siguiente sección se encuentran otras restricciones sobre la frontera. Para ello se asume que una de las transformaciones del morfismo que define el modelo lleve la frontera de la superficie a una subvariedad coisótropa de la variedad de Poisson objetivo. De esta forma se determinan otras condiciones de frontera en la teoría que luego se expresan en coordenanadas locales de la subvariedad coisótropa, que servirá para mostrar que las condiciones de frontera son invariantes bajo las transformaciones Gauge iniciales.

Las variedades coisótropas juegan un rol fundamental en geometría simpléctica ya que ellas describen sistemas con simetrías (restricción de primera clase de Dirac) y brindan un método para generar nuevos espacios simplécticos (reducción simpléctica). Ellas son el marco de trabajo general para estudiar simetrías en el mundo de Poisson. Como se dijo en la introducción inicial, un modelo interesante se presenta cuando se considera que la superficie fuente es un disco cerrado, ya que la expansión perturbativa de la integral de camino reproduce el producto estrella de Kontsevich para resolver el poblema de la cuantizacion de variedades de Poisson. Un problema relevante concierne a otras posibles condiciones de frontera. Así, las subvariedades coisótropas de una variedad de Poisson clasifican las posibles condiciones de frontera (D-branas) de los modelos sigma de Poisson.

Un modelo sigma de Poisson está especificado por su espacio objetivo, una variedad de Poisson X. Los campos del modelo están dados entonces por una transformación del espacio tangente $T\Sigma$ de una variedad orientada dos dimensional Σ, posiblemente con frontera, al haz cotangente T^*X de X. Tal tranformación está dada por un par (ϕ, η) conformada por una transformación base $\phi : \Sigma \to X$ y una 1-forma η sobre Σ que toma valores en $\phi^* T^* X$.
Si ϕ^μ son cordenadas locales en X, σ^μ, $\mu = 1, 2$ coordenadas locales en Σ, $\pi^{\mu\nu}$ las componentes de la estructura de Poisson en estas coordenadas y $\eta_i = \eta_{i\mu} d\sigma^\mu$; la acción funcional tiene la forma:

$$S_0 = \int_\Sigma \eta_\mu \wedge d\phi^\mu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge \eta_\nu, \tag{2.1}$$

bajo las transformaciones gauge infinitesimales:

$$\delta\phi^\mu = \pi^{\mu\nu}\zeta_\nu, \tag{2.2}$$

$$\delta\eta_\mu = -d\zeta_\mu - \partial_\mu \pi^{\nu\lambda}\eta_\nu, \zeta_\lambda \tag{2.3}$$

donde $\zeta \in \Gamma(\phi^* T^* X)$, la acción (2.1) transforma por un término de frontera:

$$\delta S_0 = -\int_\Sigma d(\zeta_\mu d\phi^\mu). \tag{2.4}$$

Veamos ahora que en efecto, este es el cambio de la acción.

Proposición 2.1. *El cambio de la acción (2.1), bajo las transformaciones gauge (2.2) y (2.3), es:*

$$\delta S_0 = -\int_\Sigma d(\zeta_\mu d\phi^\mu). \tag{2.5}$$

Demostración.

El cambio en S_0 es:

$$\delta S_0 = \int_\Sigma \delta \left[\eta_\mu \wedge d\phi^\mu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge \eta_\nu\right].$$

Siguiendo con el cambio dentro de la integral, se tiene:

$$\delta S_0 = \int_\Sigma \delta\eta_\mu \wedge d\phi^\mu + \eta_\mu \wedge \delta d\phi^\mu + \frac{1}{2}\delta\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge \eta_\nu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\delta\eta_\mu \wedge \eta_\nu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge \delta\eta_\nu.$$

Aplicando ahora las transformaciones Gauge (2.2) y (2.3), se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (-d\zeta_\mu - \partial_\mu\pi^{\nu\lambda}\eta_\nu\zeta_\lambda) \wedge d\phi^\mu + \eta_\mu \wedge (d\pi^{\mu\nu}\zeta_\nu + \pi^{\mu\nu}d\zeta_\nu) \\ + \frac{1}{2}\partial_\lambda\pi^{\mu\nu}\delta\phi^\lambda\eta_\mu \wedge \eta_\nu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}(-d\zeta_\mu - \partial_\mu\pi^{\sigma\lambda}\eta_\sigma\zeta_\lambda) \wedge \eta_\nu \\ + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge (-d\zeta_\nu - \partial_\nu\pi^{\sigma\lambda}\eta_\sigma\zeta_\lambda),\end{aligned}$$

donde $\delta d\phi^\mu = d(\pi^{\mu\nu}\zeta_\nu) = d\pi^{\mu\nu}\zeta_\nu + \pi^{\mu\nu}d\zeta_\nu$ y $\delta\pi^{\mu\nu} = \partial_\lambda\pi^{\mu\nu}\delta\phi^\lambda$.

Distribuyendo y aplicando nuevamente las transformaciones Gauge (2.2) y (2.3), queda:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma -d\zeta_\mu \wedge d\phi^\mu - \partial_\mu\pi^{\nu\lambda}\eta_\nu\zeta_\lambda \wedge d\phi^\mu + \eta_\mu \wedge \partial_\lambda\pi^{\mu\nu}d\phi^\lambda\zeta_\nu \\ + \eta_\mu \wedge \pi^{\mu\nu}d\zeta_\nu + \frac{1}{2}\partial_\lambda\pi^{\mu\nu}\pi^{\lambda\sigma}\zeta_\sigma\eta_\mu \wedge \eta_\nu - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}d\zeta_\mu \wedge \eta_\nu - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\partial_\mu\pi^{\sigma\lambda}\eta_\sigma\zeta_\lambda \wedge \eta_\nu \\ - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge \partial_\nu\pi^{\sigma\lambda}\eta_\sigma\zeta_\lambda,\end{aligned}$$

aquí, $d\pi^{\mu\nu} = \partial_\lambda\pi^{\mu\nu}d\phi^\lambda$.

Reorganizando términos:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma -d\zeta_\mu \wedge d\phi^\mu - \partial_\mu\pi^{\nu\lambda}\zeta_\lambda\eta_\nu \wedge d\phi^\mu + \partial_\lambda\pi^{\mu\nu}\zeta_\nu\eta_\mu \wedge d\phi^\lambda \\ + \pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu + \frac{1}{2}\partial_\lambda\pi^{\mu\nu}\pi^{\lambda\sigma}\zeta_\sigma\eta_\mu \wedge \eta_\nu - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}d\zeta_\mu \wedge \eta_\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu\pi^{\sigma\lambda}\pi^{\mu\nu}\zeta_\lambda\eta_\sigma \wedge \eta_\nu \\ - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu\pi^{\sigma\lambda}\pi^{\mu\nu}\zeta_\lambda\eta_\mu \wedge \eta_\sigma.\end{aligned}$$

Note que los siguientes términos se anulan:

$$-\partial_\mu \pi^{\nu\lambda}\zeta_\lambda \eta_\nu \wedge d\phi^\mu + \partial_\lambda \pi^{\mu\nu}\zeta_\nu \eta_\mu \wedge d\phi^\lambda,$$

pues, renombrando los índices mudos $\lambda \to \mu$, $\mu \to \nu$ y $\nu \to \lambda$ se tiene que:

$$-\partial_\mu \pi^{\nu\lambda}\zeta_\lambda \eta_\nu \wedge d\phi^\mu + \partial_\mu \pi^{\nu\lambda}\zeta_\lambda \eta_\nu \wedge d\phi^\mu = 0.$$

Los siguientes términos también se anulan:

$$\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu} d\zeta_\mu \wedge \eta_\nu - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu,$$

pues, haciendo uso de la antisimetría de $\wedge$, lo anterior se puede escribir como:

$$\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\nu \wedge d\zeta_\mu - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu,$$

ahora, restando el primer y último sumando, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\nu \wedge d\zeta_\mu,$$

renombrando los indices $\nu \to \mu$ y $\mu \to \nu$, queda:

$$\frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu + \frac{1}{2}\pi^{\nu\mu}\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu,$$

llegando a:

$$\frac{1}{2}(\pi^{\mu\nu} + \pi^{\nu\mu})\eta_\mu \wedge d\zeta_\nu = 0,$$

ya que $\pi^{\mu\nu} = -\pi^{\nu\mu}$.

Por último, observe que estos tres elementos también se anulan:

$$\frac{1}{2}\partial_\lambda \pi^{\mu\nu}\pi^{\lambda\sigma}\zeta_\sigma\eta_\mu\wedge\eta_\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^{\sigma\lambda}\pi^{\mu\nu}\zeta_\lambda\eta_\sigma\wedge\eta_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu \pi^{\sigma\lambda}\pi^{\mu\nu}\zeta_\lambda\eta_\mu\wedge\eta_\sigma,$$

pues, si se hacen los siguientes cambios de índices: $\lambda\to\sigma$, $\sigma\to\mu$ y $\mu\to\lambda$ para el segundo término y $\lambda\to\sigma$, $\sigma\to\nu$ y $\nu\to\lambda$ para el tercer término, queda:

$$\frac{1}{2}\partial_\lambda \pi^{\mu\nu}\pi^{\lambda\sigma}\zeta_\sigma\eta_\mu\wedge\eta_\nu - \frac{1}{2}\partial_\lambda \pi^{\mu\sigma}\pi^{\lambda\nu}\zeta_\sigma\eta_\mu\wedge\eta_\nu - \frac{1}{2}\partial_\lambda \pi^{\nu\sigma}\pi^{\mu\lambda}\zeta_\sigma\eta_\mu\wedge\eta_\nu;$$

luego, factorizando los términos comunes, se obtiene:

$$\frac{1}{2}(\partial_\lambda \pi^{\mu\nu}\pi^{\lambda\sigma} - \partial_\lambda \pi^{\mu\sigma}\pi^{\lambda\nu} - \partial_\lambda \pi^{\nu\sigma}\pi^{\mu\lambda})\zeta_\sigma\eta_\mu\wedge\eta_\nu.$$

Haciendo las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda \pi^{\mu\sigma}\pi^{\lambda\nu} &= -\partial_\lambda \pi^{\sigma\mu}\pi^{\lambda\nu},\\ \partial_\lambda \pi^{\nu\sigma}\pi^{\mu\lambda} &= -\partial_\lambda \pi^{\nu\sigma}\pi^{\lambda\mu},\end{aligned}$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}(\pi^{\lambda\sigma}\partial_\lambda \pi^{\mu\nu} + \pi^{\lambda\nu}\partial_\lambda \pi^{\sigma\mu} + \pi^{\lambda\mu}\partial_\lambda \pi^{\nu\sigma})\zeta_\sigma\eta_\mu\wedge\eta_\nu.$$

Observe que la suma en los paréntesis debe ser cero por la condición de Jacobi para que un campo bivectorial sea un tensor de Poisson, es decir:

$$\oint_{ijk}\sum_s \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_s}\pi_{sk} = 0 \qquad (\forall\, i,j,k). \tag{2.6}$$

Así pues,

$$\delta S_0 = \int_\Sigma -d\zeta_\mu \wedge d\phi^\mu.$$

Para terminar, observe que el integrando de la expresión anterior es la derivada exterior de $\zeta_\mu d\phi^\mu$, así, se puede escribir:

$$\delta S_0 = -\int_{\Sigma} d(\zeta_\mu d\phi^\mu),$$

que era lo que se quería mostrar.

$\square$

OBSERVACIÓN:

Usando el teorema de Stokes se puede reescribir la expresión (2.5) como:

$$\delta S_0 = -\int_{\partial\Sigma} i^*(\zeta_\mu d\phi^\mu) \tag{2.7}$$

Que más adelante será de utilidad.

En este capítulo se calcula la variación de la acción bajo un cambio infinitesimal del campo del sistema, a partir de este se encuentran las ecuaciones de movimiento y las restricciones en la frontera de la superficie dos dimensional. Además, se trabaja con una subvariedad coisótropa como imagen de la frontera de la superficie a través del campo, obteniendo así las condiciones de frontera buscadas. Por último se analiza la invarianza de las condiciones de frontera bajo las transformaciones Gauge.

En el desarrollo de esta sección asumiremos que la frontera $\partial\Sigma$ tiene una única componente conexa. También asumiremos que $\partial\Sigma$ es cerrada y es parametrizada por una variable angular τ.

La primera restricción proveniene de las ecuaciones de movimiento para el campo ϕ. Bajo un cambio infinitesimal en ϕ, el cambio en la acción 2.1 consiste de un término en la superficie menos un término en la frontera. Esto se resume en la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Un cambio infinitesimal en ϕ, produce un cambio en la acción 2.1 de la siguiente forma:*

$$\delta S_0 = \int_\Sigma (d\eta_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^{\nu\lambda}\eta_\nu \wedge \eta_\lambda)\delta\phi^\mu - \int_{\partial\Sigma} i^*(\eta_\mu \delta\phi^\mu).$$

Demostración.

El cambio infinitesimal de ϕ no depende de Σ, así, el cambio en S_0 es:

$$\delta S_0 = \int_\Sigma \delta\left(\eta_\mu \wedge d\phi^\mu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge \eta_\nu\right),$$

ya que se va a calcular el cambio de S_0 solo debido a un cambio en ϕ, se sigue que:

$$\delta S_0 = \int_\Sigma \eta_\mu \wedge d\delta\phi^\mu + \frac{1}{2}\delta\pi^{\mu\nu}\eta_\mu \wedge \eta_\nu.$$

Considérese ahora la siguiente ecuación:

$$d(\eta_\mu \delta\phi^\mu) = d\eta_\mu \delta\phi^\mu - \eta_\mu \wedge d\delta\phi^\mu,$$

de ella se ve que $\eta_\nu \wedge d\delta\phi^\mu$ se puede escribir como:

$$\eta_\mu \wedge d\delta\phi^\mu = d\eta_\mu \delta\phi^\mu - d(\eta_\mu \delta\phi^\mu),$$

así, al sustituir esta nueva expresión en la integral se obtiene:

$$\delta S_0 = \int_\Sigma d\eta_\mu \delta\phi^\mu - d(\eta_\mu \delta\phi^\mu) + \frac{1}{2}\partial_\lambda \pi^{\mu\nu} \delta\phi^\lambda \eta_\mu \wedge \eta_\nu,$$

donde $\delta\pi^{\mu\nu} = \partial_\lambda \pi^{\mu\nu} \delta\phi^\lambda$.

Es posible organizar los términos de la integral de la siguiente forma:

$$\delta S_0 = \int_\Sigma d\eta_\mu \delta\phi^\mu + \frac{1}{2}\partial_\lambda \pi^{\mu\nu} \delta\phi^\lambda \eta_\mu \wedge \eta_\nu - \int_\Sigma d(\eta_\mu \delta\phi^\mu);$$

por último, se hace el cambio de índices $\lambda \to \mu$, $\mu \to \nu$ y $\nu \to \lambda$ en el segundo término de la primera integral y se aplica el teorema de Stokes a la segunda integral:

$$\delta S_0 = \int_\Sigma (d\eta_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^{\nu\lambda} \eta_\nu \wedge \eta_\lambda) \delta\phi^\mu - \int_{\partial\Sigma} i^*(\eta_\mu \delta\phi^\mu),$$

que era lo que se quería demostrar.

□

En la expresión anterior, $i : \partial\Sigma \to \Sigma$ denota la inclusión de la frontera.

De la ecuacion anterior, se puede observar que la ecuación de movimiento en la superficie Σ es:

$$d\eta_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^{\nu\lambda} \eta_\nu \wedge \eta_\lambda = 0, \tag{2.8}$$

de esta forma, para que el cambio en la acción sea cero, se requiere que las ecuación de movimiento y el integrando $i^*(\eta_\mu \delta\phi^\mu)$ sean cero. Así, se impone la siguiente restricción en la frontera:

$$i^*(\eta_\mu \delta\phi^\mu) = 0, \tag{2.9}$$

donde $i^*\eta_\mu = \eta_{\mu\tau} d\tau$; por tanto,la restricción es escrita como:

$$\eta_{\mu\tau}\delta\phi^\mu = 0. \tag{2.10}$$

Otra restricción viene del requerimiento de hacer la acción (2.1) invariante bajo las transformaciones gauge 2.2 y (2.3). Por tanto, de acuerdo con (2.7) es obtenida la siguiente restricción:

$$i^*(\zeta_\mu d\phi^\mu) = 0; \tag{2.11}$$

que puede ser reescrita como:

$$\zeta_\mu \partial_\tau \phi^\mu = 0. \tag{2.12}$$

Finalmente, se require que las condiciones de frontera anteriores sean invariantes bajo las transformaciones gauge (2.2) y (2.3) restringidas a la frontera; para esto, es utilizada una subvariedad coisótropa $Y \subset X$. Se denota el haz conormal de Y como N^*Y. Las condiciones de frontera requieren que $\phi : \partial\Sigma \to Y$, lo que implica que $\delta\phi|_{\partial\Sigma} \in \phi^*TY$. Para que la ecuación (2.10) sea válida, se debe asumir que en la frontera $\partial\Sigma$, $\eta \in \Gamma(\phi^*N^*Y)$. Análogamente, para que sea válida la ecuación (2.12), también se debe asumir que en la frontera $\partial\Sigma$, $\zeta \in \Gamma(\phi^*N^*Y)$. Esquemáticamente, estas afirmaciones son resumidas así:

$$\phi : \partial\Sigma \longrightarrow Y \quad \Rightarrow \quad \delta\phi|_{\partial\Sigma} \in \phi^*TY, \tag{2.13}$$

$$\eta_{\mu\tau}\delta\phi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta|_{\partial\Sigma} \in \Gamma(\phi^*N^*Y), \tag{2.14}$$

$$\zeta_\mu \partial_\tau \phi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta|_{\partial\Sigma} \in \Gamma(\phi^*N^*Y). \tag{2.15}$$

Para mostrar que las condiciones de frontera $\eta_{\mu\tau}\delta\phi^\mu = 0$ y $\zeta_\mu \partial_\tau \phi^\mu = 0$ son invariantes bajo las transformaciones gauge, son consideradas las condiciones de frontera en coordenadas locales. Se eligen coordenadas locales adaptadas $\{x^{\mu^{'}}, x^{\mu^{''}}\}$ en X, de tal forma que la subvariedad Y esté dada por la condición $x^{\mu^{''}} = 0$.

De esta forma, la condiciones de frontera en estas coordenadas quedan expresadas como:

$$\phi^{\mu''} = 0, \tag{2.16}$$

$$\eta_{\mu'\tau}\delta\phi^{\mu'} + \eta_{\mu''\tau}\delta\phi^{\mu''} = 0, \tag{2.17}$$

$$\zeta_{\mu'}\partial_\tau\phi^{\mu'} + \zeta_{\mu''}\partial_\tau\phi^{\mu''} = 0. \tag{2.18}$$

Pero por la primera ecuación de las tres anteriores, se observa que $\delta\phi^{\mu^{''}} = 0$ y $\partial_\tau\phi^{\mu^{''}} = 0$, por tanto, las condiciones de frontera quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\phi^{\mu^{''}} = 0, \tag{2.19}$$

$$\eta_{\mu'\tau}\delta\phi^{\mu'} = 0, \tag{2.20}$$

$$\zeta_{\mu'}\partial_\tau\phi^{\mu'} = 0; \tag{2.21}$$

así, se puede concluir que $\eta_{\mu'\tau} = 0$ y $\zeta_{\mu'} = 0$. En resumen, las condiciones de fronteran en estas coordenadas son:

$$\phi^{\mu^{''}} = 0, \tag{2.22}$$

$$\eta_{\mu'\tau} = 0, \tag{2.23}$$

$$\zeta_{\mu'} = 0. \tag{2.24}$$

Ahora se le aplican a estas condiciones las transformaciones gauge (2.2) y (2.3):

$$0 = \delta\phi^{\mu''} = \pi^{\mu''\nu}(\phi^{\mu'}, 0)\zeta_\nu = \pi^{\mu''\nu'}(\phi^{\mu'}, 0)\zeta_{\nu'} + \pi^{\mu''\nu''}(\phi^{\mu'}, 0)\zeta_{\nu''}, \tag{2.25}$$

$$0 = \delta\eta_{\mu'\tau} = -\partial_\tau\zeta_{\mu'} - \partial_{\mu'}\pi^{\nu''\lambda''}(\phi^{\mu'}, 0)\eta_{\nu''}\zeta_{\lambda''}, \tag{2.26}$$

pero $\zeta_{\nu'} = 0$ y a su vez $\partial_\tau\zeta_{\mu'} = 0$; de esta forma, las ecuaciones anteriores toman la forma:

$$\pi^{\mu''\nu''}(\phi^{\mu'},0)\zeta_{\nu''}=0, \tag{2.27}$$

$$\partial_{\mu'}\pi^{\nu''\lambda''}(\phi^{\mu'},0)\eta_{\nu''}\zeta_{\lambda''}=0. \tag{2.28}$$

Y ya que Y es una subvariedad coisótropa, por la proposición (1.7) se tiene que $\pi^{\mu''\nu''}(\phi^{\mu'},0)=0$.
Por tanto, las condiciones de frontera son invariantes bajo las transformaciones gauge (2.2) y (2.3).

Conclusiones

- Así, es posible garantizar la consistencia del modelo sigma de Poisson bajo las transformaciones gauge (2.2) y (2.3) utilizando una subvariedad coisótropa, es decir, obligando a que la aplicación diferencial ϕ restringida a la frontera de Σ tome sus valores en una subvariedad coisótropa $Y \subset X$.

- En resumen, las condiciones de frontera quedan determinadas por la subvariedad coisótropa de la siguiente manera:

$$\phi : \partial\Sigma \longrightarrow Y \quad \Rightarrow \quad \delta\phi|_{\partial\Sigma} \in \phi^* TY,$$

$$\eta_{\mu\tau}\delta\phi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta|_{\partial\Sigma} \in \Gamma(\phi^* N^* Y),$$

$$\zeta_\mu \partial_\tau \phi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta|_{\partial\Sigma} \in \Gamma(\phi^* N^* Y).$$

Bibliografía

[1] Felder G. Cattaneo A. S. A path integral approach to the kontsevich quantization formula. *Comm. Math. Phys.*, 212, 2000.

[2] Kontsevish M. Deformation quantization of poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66, 2003.

[3] Felder G. Cattaneo A. S. Coisotropic submanifolds in poisson geometry and branes in the poisson sigma model. *Lett. Math. Phys.*, 69, 2004.

[4] Quintero A. Boundary coupling of lie algebroid poisson sigma models and representarions up to homotopy. *Lett. Math. Phys.*, 102:31–64, 2012.

[5] Falceto F. Calvo. I. Poisson reduction and branes in poisson-sigma models. *Lett. Math. Phys.*, 70:231–247, 2004.

[6] Zung N.T. Dufour J.P. *Poisson Structures and Their Normal Forms.* Progress in Mathematics 242 (Birkhäuser Verlag), Germany, 2005.

[7] Nakahara M. *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, England, 2003.

[8] Marcut I. Fernandes R.L. *Lectures on Poisson Geometry.* Notes for graduate course, UIUC, 2015.

[9] Vanhaecke P. Laurent.Gengoux C., Pichereau A. *Poisson Structures.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (A Series of Comprehensive Studies in Mathematics) 347, Germany, 2013.